Über die Konvergenz von Reihen nach Produktsystemen

Von FERENC SCHIPP in Budapest

Herrn Professor B. Sz.-Nagy zum 60. Geburtstag gewidmet

Es sei (X, S, μ) ein Maßraum mit endlichem, positivem μ-Maß und $F=\{f_n\colon n\in N\}\subset L_\mu(X)$ ein Funktionensystem mit $M_n=\operatorname{vrai}\max\limits_{x\in X}|f_n(x)|<\infty$ $(n\in N)$; $N=\{0, 1, 2, \ldots\}$. Es bezeichne $G=\{g_n\colon n\in N\}$ das Produktsystem des Funktionensystems F; das bedeutet, daß für $n\in N$ mit der dyadischen Darstellung $n=\sum\limits_{i=0}^{\infty} n_i 2^i$ $(n_i=0, 1)$

$$g_n=\prod_{i=0}^{\infty}(f_i/M_i)^{n_i} \tag{1}$$

gesetzt wird. Das System F heißt *stark multiplikativ*, wenn G ein Orthogonalsystem ist, *multiplikativ*, wenn $\int\limits_X g_n\,d\mu=0$ $(n\in N)$ ist; und *schwach multiplikativ*, wenn für sein Produktsystem G die Beziehung gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\int_X g_n\,d\mu\right|=A<\infty. \tag{2}$$

Diese Begriffe wurden von G. ALEXITS [1], [2] eingeführt und in neuester Zeit von mehreren Mathematikern mit Erfolg auf wahrscheinlichkeitstheoretische Fragen angewandt.

Das Rademachersche System $R=\{r_n\colon n\in N\}$ ist ein stark multiplikatives System und das Produktsystem des Systems R ist das Walshsche Orthogonalsystem $W=\{w_n\colon n\in N\}$.

In [1] ist folgender Satz bewiesen (Theorème 2): Ist F ein gleichnormiertes stark multiplikatives System mit $M_n=1$ $(n\in N)$, so ist die Reihe $\sum c_n g_n$ unter der Bedingung $\sum c_n^2<\infty$ fast überall $(C, \alpha>0)$ summierbar.

In [3] wurde dieser Satz folgenderweise verschärft: Ist F ein schwach multiplikatives System und genügt sein Produktsystem G der Bedingung von I. SCHUR (s. [4], S. 70), so ist die Reihe $\sum c_n g_n$ im Falle $\sum c_n^2<\infty$ fast überall $(C, \alpha>0)$-summierbar.

Dieser Satz wird folgenderweise verallgemeinert:

Satz 1. *Ist F ein schwach multiplikatives System und G das Produktsystem von F, so konvergiert die Reihe $\sum c_n g_n$ unter der Bedingung $\sum c_n^2 < \infty$ fast überall.*

Es sei $f \in L^p[0, 1]$ $(1 \leqq p < \infty)$, $\hat{f}(n) = \int_0^1 f(t) w_n(t)\, dt$ $(n \in N)$, und für $x \in X$, $t \in [0, 1]$; $1 < s < \infty$ und $n = 1, 2, \ldots$ führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

$$S_n(f)(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k) w_k(t), \quad T_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k) g_k(x),$$

$$H_n^{(s)}(f)(t) = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |S_k(f)(t)|^s \right\}^{1/s}, \quad K_n^{(s)}(f)(x) = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |T_k(f)(x)|^s \right\}^{1/s}.$$

Wir werden beweisen:

Satz 2. *Ist $f \in L^p[0, 1]$ $(1 < p < \infty)$, so gilt für $1 < s < \infty$ (mit der Konstante A in* (2)*) und für $n = 1, 2, \ldots$:*

$$\|K_n^{(s)}(f)\|_{X,p} \leqq \left(\frac{A-1}{p} + 1 \right) \|H_n^{(s)}(f)\|_p. \text{[1]}$$

Nach einem Satz von P. Sjölin ([5], Theorem C) gilt für $f \in L^p[0, 1]$ $(p > 1)$

$$\|\sup_n |S_n(f)|\|_p \leqq C_p \|f\|_p. \tag{3}$$

Da die Funktionen $H_n^{(s)}(f)(t)$, $K_n^{(s)}(f)(x)$ in bezug auf s monoton zunehmend sind und $\lim\limits_{s \to \infty} H_n^{(s)}(f)(t) = \max\limits_{1 \leqq k \leqq n} |S_k(f)(t)|$, $\lim\limits_{s \to \infty} |K_n^{(s)}(x)| = \max\limits_{1 \leqq k \leqq n} |T_k(f)(x)|$ ist, ergibt sich aus Satz 2 und aus (3) das folgende

Korollar. *Ist $f \in L^p[0, 1]$ $(1 < p < \infty)$, so gilt*

$$\|\sup_n |T_n(f)|\|_{X,p} \leqq B_p \|f\|_p. \tag{4}$$

Daraus folgt

Satz 3. *Ist $f \in L^p[0, 1]$ $(p > 1)$, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) g_n$ fast überall.*

Satz 1 ist offenbar in Satz 3 als Spezialfall enthalten.

Beweis des Satzes 2. Wir führen die „Kernfunktionen"

$$D_n(x, t) = \sum_{k=0}^{n-1} g_k(x) w_k(t) \qquad (t \in [0, 1];\ x \in X;\ n = 1, 2, \ldots)$$

ein. Aus der Definition von G und W folgt

$$D_{2^k}(x, t) = \prod_{n=0}^{k-1} (1 + r_n(t) f_n(x)/M_n) \geqq 0 \quad (t \in [0, 1];\ x \in X),$$

[1] $\|_p$ und $\|_{X,p}$ bezeichnen Norm in $L^p[0, 1]$ und $L^p_\mu(X)$.

woraus sich nach (2)

$$\int_X D_{2^k}(x, t)\, d\mu(x) \leqq A, \quad \int_0^1 D_{2^k}(x, t)\, dt = 1 \quad (t \in [0, 1];\ x \in X;\ k \in N) \tag{5}$$

ergibt. Auf Grund der Orthogonalität des Walshschen Systems folgt

$$T_n(f)(x) = \sum_{m=0}^{n-1} \hat{f}(m) g_m(x) = \int_0^1 S_n(f)(t) D_{2^k}(x, t)\, dt \quad \text{für} \quad 2^k > n.$$

Es sei $1/p + 1/p' = 1$ und $g \in L_\mu^{p'}(X)$ eine beliebige Funktion mit $\|g\|_{X, p'} \leqq 1$. Offenbar gibt es Funktionen $\alpha_m \in L_\mu(X)$ derart, daß mit $s' = s/(s-1)$ fast überall in X

$$K_n^{(s)}(f)(x) = \frac{1}{n^{1/s}} \sum_{m=1}^{n} \alpha_m(x) T_m(f)(x), \quad \left\{ \sum_{m=1}^{n} |\alpha_m(x)|^{s'} \right\}^{1/s'} = 1$$

bestehen. Wir betrachten das lineare Funktional

$$I(g) = \int_X g K_n^{(s)}(f)\, d\mu(x) = \frac{1}{n^{1/s}} \int_X g \sum_{m=1}^{n} \alpha_m T_m(f)\, d\mu(x) =$$

$$= \frac{1}{n^{1/s}} \int_X \int_0^1 \left(\sum_{m=1}^{n} \alpha_m(x) S_m(f)(t) \right) g(x) D_{2^k}(x, t)\, dt\, d\mu(x).$$

Auf Grund der Hölderschen Ungleichung ergibt sich

$$|I(g)| \leqq \int_X \int_0^1 H_n^{(s)}(f)(t) \left\{ \sum_{m=1}^{n} |\alpha_m(x)|^{s'} \right\}^{1/s'} g(x) D_{2^k}(x, t)\, dt\, d\mu(x) =$$

$$= \int_0^1 H_n^{(s)}(f)(t) \left(\int_X g(x) D_{2^k}(x, t)\, d\mu(x) \right) dt.$$

Daraus, durch Anwendung der Hölderschen Ungleichung folgt

$$I(g) \leqq \|H_n^{(s)}(f)\|_p \left\{ \int_0^1 \left| \int_X g(x) D_{2^k}(x, t)\, d\mu(x) \right|^{p'} \right\}^{1/p'} = \|H_n^{(s)}(f)\|_p \cdot B.$$

Für beliebige $h \in L^p[0, 1]$ mit $\|h\|_p \leqq 1$ sei

$$J(h) = \int_0^1 h(t) \left(\int_X g(x) D_{2^k}(x, t)\, d\mu(x) \right) dt.$$

Auf Grund der Ungleichung

$$|h(t) g(x)| \leqq \frac{|h(t)|^p}{p} + \frac{|g(x)|^{p'}}{p'}$$

und nach (5) ergibt sich

$$|J(h)| \leqq \frac{1}{p} \int_0^1 |h(t)|^p \Big(\int_X D_{2^k}(x, t)\, d\mu(x) \Big) dt +$$

$$+ \frac{1}{p'} \int_X |g(x)|^{p'} \Big(\int_0^1 D_{2^k}(x, t)\, dt \Big) d\mu(x) \leqq \frac{A}{p} + \frac{1}{p'}.$$

Daraus folgt, daß

$$B = \sup_{\|h\|_p \leqq 1} |J(h)| \leqq \frac{A}{p} + \frac{1}{p'}$$

gilt, und so ist

$$\|K_n^{(s)}(f)\|_{X,p} = \sup_{\|g\|_{X,p'}} |I(g)| \leqq \left(\frac{A}{p} + \frac{1}{p'} \right) \|H_n^{(s)}\|_p .$$

Damit ist Satz 2 bewiesen.

Beweis des Satzes 3. Aus (3) folgt, daß für $f \in L^p[0, 1]$ $(p > 1)$ $\lim_{n \to \infty} \|f - S_n(f)\|_p = 0.$ gilt. Aus der Folge $h_n = f - S_n(f)$ läßt sich eine Teilfolge $\{h_{n_k}\}$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} \|h_{n_k}\|_p^p < \infty$ herausgreifen. Ist $n_k \leqq n < n_{k+1}$, so gilt

$$\varrho_n(x) = \sup_{m \geqq n} |T_m(f)(x) - T_n(f)(x)| \leqq 2 \sup_{m \geqq n_k} |T_m(f)(x) - T_{n_k}(f)(x)| =$$

$$= 2 \sup_m |T_m(h_{n_k})(x)| = \vartheta_k(x).$$

Da nach (4) $\|\vartheta_k\|_{X,p} \leqq B_p \|h_{n_k}\|_p$ gilt, so ist $\lim_{k \to \infty} \vartheta_k(x) = 0$ und gilt auch $\lim_{n \to \infty} \varrho_n(x) = 0$ fast überall.

Damit haben wir auch Satz 3 bewiesen.

Ich möchte Herrn Professor G. ALEXITS für seine wertvollen Ratschläge bei der Fertigstellung dieser Arbeit meinen aufrichtigen Dank aussprechen.

Literaturverzeichnis

[1] G. ALEXITS, Sur la sommabilité des séries orthogonales, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **4** (1953), 181—188.

[2] G. ALEXITS, Stochastische Unabhängigkeit und Orthogonalität, *Mitteilungen Math. Seminar Giessen*, **92** (1971), 1—10.

[3] G. ALEXITS—A. SZÉP, On series of product functions, *Periodica Math. Hung.*, **3** (1973), 37—39.

[4] S. KACZMARZ—H. STEINHAUS, *Theorie der Orthogonalreihen* (New York, 1951).

[5] P. SJÖLIN, An inequality of Paley and convergence a. e. of Walsh-Fourier series, *Arkiv för Math.*, **7** (1968), 551—570.

(Eingegangen am 2. Februar 1973)